ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΔΟΜΕΣ Ι

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 29 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2016

Θέμα 1. [1.5] Έστω ότι G είναι μια κυκλική ομάδα.

1. Αν η G περιέχει μια μη-τετριμμένη πεπερασμένη υποομάδα, να δειχθεί ότι η G είναι πεπερασμένη.
2. Αν η G είναι άπειρη, να δειχθεί ότι για κάθε $n \geqslant 1$, η G περιέχει μοναδική υποομάδα H_n με δείκτη $[G : H_n] = n$.
3. Να δειχθεί ότι η G έχει άρτιο πλήθος γεννητόρων αν και μόνον αν $|G| \geqslant 3$.

Θέμα 2. [1.5] Έστω ότι G είναι μια ομάδα. Στην ομάδα ευθύ γινόμενο $G \times G$ θεωρούμε το υποσύνολο

$$H = \{(x, x) \in G \times G \mid x \in G\}$$

1. Να δειχθεί ότι το υποσύνολο H είναι μια υποομάδα της $G \times G$.
2. Να δειχθεί ότι η H είναι κανονική υποομάδα της $G \times G$ αν και μόνον αν η ομάδα G είναι αβελιανή.
3. Αν η ομάδα G είναι αβελιανή, να προσδιορισθεί η ομάδα πηλίκο $(G \times G)/H$.

Θέμα 3. **[1.5]** Θεωρούμε την ακόλουθη μετάθεση

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 9 & 1 & 4 & 5 & 7 & 3 & 6 & 10 & 2 & 8 & 13 & 11 & 12 \end{pmatrix} \in S_{13}$$

1. Να γραφεί η σ ως γινόμενο ξένων κύκλων και ως γινόμενο αντιμεταθέσεων.
2. Να εξετασθεί αν η σ είναι άρτια ή περιττή μετάθεση, και να βρεθεί η τάξη της.
3. Να βρεθεί η μετάθεση σ^{2016}.
4. Να εξετασθεί αν οι μεταθέσεις σ και τ είναι συζυγείς, όπου

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 4 & 5 & 10 & 7 & 9 & 11 & 3 & 13 & 2 & 1 & 6 & 8 & 12 \end{pmatrix} \in S_{13}$$

Αν οι μεταθέσεις σ και τ είναι συζυγείς, να βρεθεί μετάθεση $\rho \in S_{13}$ έτσι ώστε: $\rho \circ \sigma \circ \rho^{-1} = \tau$.

Ασκ 9.2.39

Θέμα 4. **[1.5]** Να σχεδιασθεί το διάγραμμα Hasse των υποομάδων της κυκλικής υποομάδας $G = \langle \sigma \rangle$ της S_{13} η οποία παράγεται από την μετάθεση σ του θέματος 3:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 9 & 1 & 4 & 5 & 7 & 3 & 6 & 10 & 2 & 8 & 13 & 11 & 12 \end{pmatrix} \in S_{13}$$

Θέμα 5. **[2]** Θεωρούμε τους δακτύλιους ευθύ γινόμενο $R = \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_8$ και $S = \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_8$.

1. Να βρεθεί η χαρακτηριστική $\mathrm{char}(R)$ του R και η χαρακτηριστική $\mathrm{char}(S)$ του S. (Ασκ. Β 19.9)
2. Να προσδιορισθούν οι ομάδες $\mathrm{U}(R)$ και $\mathrm{U}(S)$ των αντιστρέψιμων στοιχείων των R και S αντίστοιχα.
3. Να βρεθεί ένα μέγιστο ιδεώδες του δακτυλίου R και να δειχθεί ότι κάθε πρώτο ιδεώδες του R είναι μέγιστο.
4. Να βρεθεί ένα πρώτο ιδεώδες του δακτυλίου S το οποίο δεν είναι μέγιστο.

Θέμα 6. **[1]** Έστω ότι R είναι ένας δακτύλιος με μονάδα και υποθέτουμε ότι το πλήθος των στοιχείων του είναι ίσο με p, όπου p είναι ένας πρώτος αριθμός. Να δειχθεί ότι ο δακτύλιος R είναι σώμα. 7.2.20

Θέμα 7. **[2]** Θεωρούμε το ακόλουθο σύνολο 2×2 πινάκων με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$:

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{K}) \mid a, b \in \mathbb{K} \right\}$$

1. Να δειχθεί ότι το σύνολο R είναι ένας μεταθετικός υποδακτύλιος του δακτυλίου πινάκων $\mathrm{M}_2(\mathbb{K})$.
2. Να προσδιορισθεί η ομάδα $\mathrm{U}(R)$ των αντιστρέψιμων στοιχείων του δακτυλίου R.
3. Να βρεθεί ένα μέγιστο ιδεώδες I του R και να περιγραφεί ο δακτύλιος πηλίκο R/I.
4. Να δειχθεί ότι υπάρχει ένας ισομορφισμός δακτυλίων $R \cong \mathbb{K}[t]/(t^2)$.

Καλή Επιτυχία!